



**PRE - SOLUTION 2**

**Key point**

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2} = \frac{1}{4}$  에서 극한값이 존재하므로  $f(2) = 0$  이다.

**Step1**

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2} = f'(2)$  이고 함수  $f(x)$  는 삼차함수이므로

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \times \frac{1}{\{f'(x)\}^2} \right\}$  이다.

(i)  $f'(2) = 0$  인 경우

$f(1) = f(2) = f'(2) = 0$  이므로  $f(x) = (x-1)(x-2)^2$ ,  $f'(x) = (x-2)(3x-4)$  이고

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{(x-2)(3x-4)^2} \neq \frac{1}{4}$  이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii)  $f'(2) \neq 0$  인 경우

$\lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \times \frac{1}{\{f'(x)\}^2} \right\} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{4}$  에서  $f'(2) = 4$  이다.

(i), (ii)에 의하여  $f'(2) = 4$  이다.

**Step2**

$f(1) = 0$ ,  $f(2) = 0$ ,  $f'(2) = 4$  이므로  $f(x) = (x-1)(x-2)(x+2)$  이고  
 $f(3) = 2 \times 1 \times 5 = 10$  이다.

Pre Solution

대표 문항의 풀이법을 요약하여 제시합니다.

기출 분석 풀이

대표 문항의 풀이법이며  
여러 가지 풀이법이 존재할 경우,  
방향성 별로 제시합니다.

Key point

풀이를 진행하는데 있어  
방향성 또는 핵심적인 사실을  
제시합니다.

문항 다시 보기

현재 다루고 있는 문항을  
간략하게 보여줍니다.

기출 분석 풀이 2

**Key point** 분수꼴 함수의 극한이 주어졌을 때 가장 먼저 관찰해야 하는 것은 무엇일까?

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)[f'(x)]^2} = \frac{1}{4}$  에서 분모가 0 으로 수렴하고  
극한값은 0 이 아닌 상수라는 정보를 우선 확인해야 한다.

극한값이 0 이 아닌 상수인 경우, 분모, 분자의 0 인수의 차수가 같아야 한다.  
따라서 함수  $f(x)$  에서 0 인수인  $x-2$  의 차수가 1 이상이 되어야 한다.

문항 다시 보기

최고차항의 계수가 1 이고  $f(1) = 0$  인 삼차함수  $f(x)$  가

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)[f'(x)]^2} = \frac{1}{4}$$

을 만족시킬 때,  $f(3)$  의 값은?

**Step1** 극한을 미분계수와 연결 지을 수 있을까?

삼차함수  $f(x)$  에 대하여  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$  이므로 이를 활용하여 주어진 식을 다음과 같이 변형하자.

$$\begin{aligned}
 & f(2) = 0 \text{ 이므로 다음과 같다.} \\
 & \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{(x-2)\{f'(x)\}^2} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \times \frac{1}{\{f'(x)\}^2} \right\}
 \end{aligned}$$

(i)  $f'(2) = 0$  인 경우  
 $f(1) = f(2) = f'(2) = 0$  이므로  
 $f(x) = (x-1)(x-2)^2$ ,  $f'(x) = (x-2)(3x-4)$  이다.  
 따라서  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{(x-2)\{f'(x)\}^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-1}{(x-2)(3x-4)^2} \neq \frac{1}{4}$  이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ii)  $f'(2) \neq 0$  인 경우

$$\begin{aligned}
 & \lim_{x \rightarrow 2} \left\{ \frac{f(x) - f(2)}{x-2} \times \frac{1}{\{f'(x)\}^2} \right\} \\
 &= f'(2) \times \frac{1}{\{f'(2)\}^2} \\
 &= \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{4} \text{ 에서 } f'(2) = 4 \text{ 이다.}
 \end{aligned}$$

(i), (ii)에 의하여  $f'(2) = 4$  이다.

**Step**

문항 풀이의 흐름에 따른 질문과 그에 대한 해답을 단계별로 제시합니다.

핵심 개념 정리

기출 분석을 통해 해당  
테마에서 학습된 개념을  
정리하여 제시합니다.

핵심 개념 정리

#기출 분석 01 - 풀이 1, 2, 3  
#기출 분석 02 - 풀이 1

01 0 인수와 인수정리

$x \rightarrow a$  일 때  $0/0$  꼴의 극한에서  $x - a$ 를 편의상 '0 인수'라 부르자.  
또한 0 인수가 곱해진 횟수를 '0 인수의 차수'라 하자.

다항식  $f(x)$ 가 어떤 0 인수를 갖는지 파악한다면 0 인수도 인수의 한 종류이므로  
인수정리를 통해 다음과 같이 식을 작성할 수 있다.

다항식  $f(x)$ 가  $x - a$ 를 인수로 갖는다.  
 $\Leftrightarrow f(a) = 0$   
 $\Leftrightarrow f(x) = (x - a)Q(x)$  (단,  $Q(x)$ 는 다항식)

0 인수는 공식 수학 용어는 아니지만  $0/0$  꼴의 극한을 분석할 때 매우 편리한 도구로 활용할 수 있다.

02 0 인수의 차수로 표현하기

#기출 분석 02 - 풀이 1

다항함수  $f(x)$ 에 대하여  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{(x - a)^n} = L$  (단,  $L$ 은 0이 아닌 상수)일 때,  
 $f(x) = (x - a)^n Q(x)$ 로 표현할 수 있다. (단,  $Q(a) \neq 0$ )

03 분수꼴 함수의 극한

#기출 분석 01 - 풀이 1, 2, 3  
#기출 분석 02 - 풀이 1

다항함수  $f(x), g(x)$ 에 대하여  
 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = L$  ( $L$ 은 상수)일 때,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  이면  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  이다.  
 $L \neq 0$  인 경우,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  이면  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  또한 성립하며  
 두 다항식  $f(x)$ 와  $g(x)$ 의 0 인수의 차수는 같다.

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = L$  ( $L$ 은 상수)일 때,  
 $L \neq 0$  인 경우, 두 함수의 차수는 같고  
 $L = 0$  인 경우,  $f(x)$ 의 차수가  $g(x)$ 의 차수보다 크다.

## 기출 적용 04

2025학년도 수능 21번

함수  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 4$ 가 다음 조건을 만족시키도록 하는 두 정수  $a, b$ 에 대하여  $f(1)$ 의 최댓값을 구하시오. [4점]

모든 실수  $a$ 에 대하여  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(2x+1)}{f(x)}$ 의 값이 존재한다.

### ※ 기출 적용

학습한 핵심 개념 정리를  
적용하며 추가로  
학습할 수 있도록 평가원  
기출 문항을 중심으로  
교육청 문항 등을  
엄선하여 수록하였습니다.

Step list

문항 해결의 흐름을 잡을 수 있는 질문 순서를 단계별로 제시합니다.

핵심 개념

핵심 개념 정리 중 해당 문항을 풀기 위해 알아야 하는 내용을 요약하여 제시합니다.

Key point

삼차함수  $f(x)$ 에 대하여  $f(\alpha) = 0$ 인  $\alpha$ 는 반드시 존재한다.

Step list

- Step 1  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ 이 되도록 하는  $a$ 에 대하여  $\lim_{x \rightarrow a} f(2x+1)$ 의 값은 무엇이 되어야 할까?
- Step 2 방정식  $f(x) = 0$ 의 실근의 개수를 알아볼까?
- Step 3  $f(1)$ 의 최댓값을 구해볼까?

핵심 개념

0인수와 인수정리	<p><math>x \rightarrow a</math>일 때 0/0 꼴의 극한에서 <math>x - a</math>를 편의상 '0인수'라 부르지. 또한 0인수가 곱해진 횟수를 '0인수의 차수'라 하자.</p> <p>다항식 <math>f(x)</math>가 어떤 0인수를 갖는지 파악한다면 0인수도 인수의 한 종류이므로 인수정리를 통해 다음과 같이 식을 작성할 수 있다.</p> <p>다항식 <math>f(x)</math>가 <math>x - a</math>를 인수로 갖는다.  <math>\Leftrightarrow f(a) = 0</math>  <math>\Leftrightarrow f(x) = (x - a)Q(x)</math> (단, <math>Q(x)</math>는 다항식)</p>
분수꼴 함수의 극한	<p>다항함수 <math>f(x), g(x)</math>에 대하여</p> <p><math>\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{f(x)} = L</math> (<math>L</math>은 상수)일 때, <math>\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0</math>이면 <math>\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0</math>이다.  <math>L \neq 0</math>인 경우, <math>\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0</math>이면 <math>\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0</math> 또한 성립하며          두 다항식 <math>f(x)</math>와 <math>g(x)</math>의 0인수의 차수는 같다.</p>

## EXERCISE 13 K

2023학년도 강대모의고사K 27 8회 20번

최고차항의 계수가 1인 삼차함수  $f(x)$ 와 상수  $a$ 가 다음 조건을 만족시킬 때,  $a+f(8)$ 의 값을 구하시오. [4점]

(가)  $x$ 에 대한 방정식  $f(x)=0$ 은 서로 다른 세 실근을 갖는다.

(나)  $\lim_{x \rightarrow t} \frac{f(x+a)}{(x-1)f(x)}$ 의 값이 존재하지 않도록 하는 실수  $t$ 가 4뿐이다.

### Exercise

기출로 연습한 내용을 활용하여 스스로 진단할 수 있도록 고퀄리티의 자작 문항 및 강대모의고사, 강대모의고사K, 강대N제 문항을 폭넓은 난도로 수록하였으며 고난도의 문항은 K를 붙여 구분하였습니다.

자기 평가

각 Step까지 도달시간을 기록하여 어떤 단계에서 시간이 지연되었는가를 스스로 진단할 수 있도록 하였습니다.

정답 및 해설 96쪽

Key point

주어진 극한식에서 분모가 0으로 수렴하는 경우를 확인해보자.

Step list

- Step 1  $t = 1$  또는  $t = 4$ 인 경우를 알아볼까?
- Step 2  $f(a+1) = f(4) = 0$ 에서  $a+1 = 4$ 인 경우와  $a+1 \neq 4$ 인 경우로 나뉘볼까?

자기 평가

Step	풀이 시간	평가 내용
Step 1		
Step 2		